VARIANT

ДВИ МГУ · Математика · 2025 · Резерв

1. Найдите в явном виде целое число, задающееся выражением $\dfrac{(486+375)^2-(486-375)^2}{750}$.

2. Дана геометрическая прогрессия. Сумма первых её десяти членов равна 10. Сумма первых её тридцати членов равна 70 . Найдите сумму первых её пятидесяти членов.

3. Решите неравенство $10+\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{5}} x \geqslant \log_5 x^5+\log_2 x^2$.

4. Решите уравнение $\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x+2\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-1$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках A и B. Их общая касательная, ближайшая к точке A, касается Ω_1 и Ω_2 в точках C и D соответственно. Касательная к окружности Ω_1 в точке A пересекает Ω_2 в точке E (отличной от A), а продолжение CA пересекает отрезок ED в точке F. Найдите BF, если известно, что $AB=8$ и что $BC:BD=4:3$.

6. Даны числа $a_k=\dfrac{k}{2025}, k=1,2,3,\ldots,2024$. Найдите сумму

$$\frac{a_1^2}{2a_1-1}+\frac{a_2^2}{2a_2-1}+\frac{a_3^2}{2a_3-1}+\ldots+\frac{a_{2024}^2}{2a_{2024}-1}$$

7. Дан куб с основаниями $ABCD, A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра этого куба равна 1. На диагонали куба BD' отмечена точка E так, что $D'E=3\cdot BE$. Отмечены также середина F ребра AB и середина G отрезка $A'F$. Найдите объём тетраэдра $BC'EG$.